本ファイルは、二次関数の基本的な問題の解説です。

関数における基本用語を確認するために、初めに、以下の問題を解きましょう。

問題

関数 $y = 3x + 4\ (-3 < x \leqq 2)$ の値域を求めよ。また、最大値と最小値があれば求めよ。

今回の問題では、値域を求めるために、定義域 $(-3 < x \leqq 2)$ の端点 $x = -3$ を関数 $y = 3x + 4$ にそのまま代入してはいけません。その理由は、この関数は $x = -3$ では定義されていないからです。そのために、$f(x) = 3x + 4$ など、一度おいてあげるとよいでしょう。

解答

$f(x) = 3x + 4$ とおくと、$f(-3) = 3(-3) + 4 = -5$ であり $f(2) = 3 \cdot 2 + 4 = 10$ である。よって、求める値域は、$-5 < y \leqq 10$ である。また、最小値は存在せず、最大値は $10\ (x = 2)$ である。

「最小値や最大値があれば求めよ」などと問われたとき、存在していなければ、なにも触れないより「存在しない」と書くべきです。何も書けなかった人が点数を取ることのないように、そういうふうにする習慣があるのかもしれませんね。

問題

次の二次関数のグラフをかけ。

(1) $y = 3x^2 + 6x - 1$　　(2) $y = -x^2 + 6x - 8$

この問題のように定義域が明記されていないときは、考えられる実数すべてで定義されていると捉えてグラフをかきましょう。グラフを載せるのは骨が折れますので、必要だと思われる説明にとどめます。

説明

それぞれ平方完成をし、頂点の座標と軸の方程式、上に凸なのか下に凸なのか？だけを述べます。

(1) $y = 3x^2 + 6x - 1$ について；

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6x - 1 \\ &= 3(x^2 + 2x) - 1 \\ &= 3(x + 1)^2 - 3 \cdot 1^2 - 1 \\ &= 3(x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

よって、頂点の座標は $(-1, -4)$ であり、軸の方程式は $x = -1$ であり、下に凸のグラフです。さらに $x = 0$ のとき $y = -1$ です。

(2) $y=-x^2+6x-8$ について；

$$\begin{aligned} y &= -x^2+6x-8 \\ &= -(x^2-6x)-8 \\ &= -(x-3)^2-(-1)\cdot(-3)^2-8 \\ &= -(x-3)^2+1 \end{aligned}$$

よって、頂点の座標は $(3,1)$ であり、軸の方程式は $x=3$ であり、上に凸のグラフです。さらに $x=0$ のとき $y=-8$ です。

頂点の座標と軸の方程式、どちらに凸か？がわかっていて、グラフが書けないとなると、かなりやばいですよ。

問題

放物線 $y=3x^2+6x+2$ を平行移動して放物線 $y=3x^2-12x-13$ に重ねることができる。どのように平行移動したらよいか。

この問題は、頂点の座標がどれだけ違うか調べれば、答えがわかりますね。

解答

頂点の座標がどれだけ違うかを調べる。

$y=3x^2+6x+2$ について；

$$\begin{aligned} y &= 3x^2+6x+2 \\ &= 3(x^2+2x)+2 \\ &= 3(x+1)^2-3\cdot 1^2+2 \\ &= 3(x+1)^2-1 \end{aligned}$$

よって、この関数の頂点の座標は $(-1,-1)$ である。

$y=3x^2-12x-13$ について；

$$\begin{aligned} y &= 3x^2-12x-13 \\ &= 3(x^2-4x)-13 \\ &= 3(x-2)^2-3(-2)^2-13 \\ &= 3(x-2)^2-25 \end{aligned}$$

したがって、この関数の頂点の座標は $(2,-25)$ である。

以上より、二次関数 $y=3x^2+6x+2$ のグラフを x 軸方向に $+3$ だけ、y 軸方向に -24 だけ平行移動すると、二次関数 $y=3x^2-12x-13$ のそれに重なる。

実は、x^2 の係数が一致しているとき、いつでも平行移動で重ね合わせることができます。なぜだか、わかるでしょうか？