前回の授業では，論理の章を学びました.「否定，かつ，または」という節の中で，次のような問題がありました.（論理を習った後に集合を習う方が自然でしょうが，そうではないようです．そのため問題の文章構成に違和感があります.）

問題

正の整数の全体を全体集合とし，条件 p :「3 の倍数」，q :「5 の倍数」を満たす集合をそれぞれ P，Q とするとき，条件 :「15 の倍数」を満たす集合を P，Q を用いて表しましょう．答えは $P \cap Q$ です.

説明としては，次のように書けばよいでしょう.

説明

集合 P, Q はそれぞれ

$$P = \{n|\ n \text{ は 3 の倍数 }\} = \{\ldots, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots\},$$

$$Q = \{n|\ n \text{ は 5 の倍数 }\} = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$$

と表すことができます．P，Q の共通部分を調べてみると，

$$P \cap Q = \{\ldots, -15, 0, 15, 30, \ldots\}$$

だとわかります．よって，

$$\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\} = \{\ldots, -15, 0, 15, 30, \ldots\} = P \cap Q$$

と表すことができます.

説明ではなく答えが $\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\} = P \cap Q$ であることを証明したい場合は，以下を参考にしてください．ただし，ここでは証明の半分のみ話します．残りの半分も証明したい場合は，いくつか準備が必要になります.

証明の半分

$\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\} = P \cap Q$ を示すためには，

(i) $\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\} \subset P \cap Q$

(ii) $\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\} \supset P \cap Q$

を示せばよいです．ここでは (i) のみを話します．集合 $\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\}$ のどんな要素も，$P \cap Q$ の要素であることをいいます．今，集合 $\{n|n \text{ は 15 の倍数 }\}$ から勝手に 1 つ要素をとり，それを a とします．この a は 15 の倍数なので，ある整数 m を用いて，

$$a = 15m$$

と書けます．m は整数なので $5m$ も整数であり，

$$a = 3\ (5m)$$

と書けます．よって，a は 3 の倍数です．つまり，a は P の要素ということになります．同様に，m は整数なので $3m$ も整数であり，

$$a = 5\ (3m)$$

と書けます．したがって，a は 5 の倍数です．つまり，a は Q の要素ということになります．以上より，a は P の要素でも Q の要素でもあることが分かりました．すなわち，a は $P \cap Q$ の要素ということになります．集合 $\{n|n$ は 15 の倍数 $\}$ のどんな要素 a も，$P \cap Q$ の要素であることが言えたので，(i) が示せたことになります．

(ii) を示すには，次の定理が役に立ちます．

定理

どんな整数 a,b,c についても，ab が c で割り切れるとき，a と c の最大公約数が 1 ならば，b は c で割り切れます．

この定理の証明を与えて，(ii) を厳密に証明する必要性は感じません．省略します．しかし以下のように考えて，納得することは重要です．

(ii) の説明

集合 $P \cap Q$ から勝手に 1 つ要素をとり，それを b とします．b は P の要素でもあり，Q の要素でもあります．b が P の要素ということは，b は 3 の倍数ということです．よって，ある整数 m を用いて，

(1)　　$b = 3m$

と書けます．同様に，b が Q の要素ということから，b は 5 の倍数ということになり，ある整数 n を用いて，

(2)　　$b = 5n$

とも書けます．数式 (1), (2) から，

$$m = \frac{5n}{3}$$

がわかります．この式の左辺は整数 m なので，右辺の分子は分母で割り切れるということがわかります．ところが，5 を 3 で割り切ることはできないため，必然的に n が 3 で割り切れなければいけないでしょう．つまり，n は 3 の倍数ということになります．したがって，ある整数 l を用いて，

(3)　　$n = 3l$

と書けます．数式 (3) を (2) に代入すると，

$$b = 5(3l) = 15l$$

が得られます．l は整数なので，b は 15 の倍数ということになります．すなわち，b は集合 $\{n|n$ は 15 の倍数$\}$ の要素ということになります．$P \cap Q$ のどんな要素 b も，集合 $\{n|n$ は 15 の倍数 $\}$ の要素であることが言えたので，(ii) が言えたことになりそうです．